Физико-математические науки

УДК 514.1

Калашникова Лариса Евгеньевна
кандидат биологических наук,
доцент кафедры биомедицинской инженерии
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
Kalashnikova Larysa
PhD in Biology, Assistant Professor of the
Department of Biomedical Engineering
National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

Лысак Кристина Евгеньевна
художник
Национальный драматический театр имени Леси Украинки
Lysak Kristina
Artist
Lesya Ukrainka Natsional Dramatic Theater

Рыльцев Евгений Владимирович
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры графического дизайна
Межрегиональная академия управления персоналом
Ryltcev Evgehiy
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department of Graphic Design
Interregional Academy of Personnel Management

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

MATHEMATICAL SUPPORT OF AXONOMETRIC ORTHOGONAL PROJECTION

Аннотация. *Проведен анализ эволюции прямоугольного координатного тригранника ортогональной аксонометрической изометрии в его различные формы, соответствующие ортогональной диметрии. Это позволило в наглядной форме наблюдать динамику изменения коэффициентов искажения по координатным осям при аксонометрическом проецировании.*

Ключевые слова: *аксонометрия, ортогональность, проецирование.*

Summary. *The analysis of the evolution of a rectangular trihedron orthogonal axonometric isometric view in its various forms, corresponding to the orthogonal diameters. This enabled to observe the dynamics of change in distortion factor of the coordinate axes in the axonometric projection.*

Key words: *axonometry, orthogonal, projection.*

Освоение учебной дисциплины "ортогональная аксонометрия" осложняется тем, что её исходные посылки подаются, чаще всего, в декларативной форме или, в лучшем случае, со ссылкой на труднодоступные источники [1-5]. Настоящим мы постарались исправить сложившуюся ситуацию, базируясь исключительно на правилах элементарной геометрии с тригонометрией [6; 7].

Как известно, аксонометрия - это набор способов отображения на плоскости (в двумерном пространстве) какого-либо природного тримерного объекта. Его положение в пространстве и его размеры определяются системой декартовых координат. При этом плоскость аксонометрической проекции "сечёт", в общем случае, прямоугольный координатный тригранник произвольно, что выражается в соотношении длин его координатных осей: $OZ \neq OY \neq OX$ (рис.1). В результате образовавшийся треугольник следов – ΔZYX [1-5] может принимать произвольную форму. То

есть, его стороны могут быть связаны неравенством – ZY ≠ ZX ≠ YX. Это вид проекции – аксонометрическая триметрия. Единственным ограничивающим условием в случае ортогональной аксонометрии является направление отрезка OO_1 – перпендикуляра из начала координат O на аксонометрическую плоскость проекции ZYX в точку O_1– ортоцентр [6; 7] треугольника ZXY, чем и задаётся направление проецирующих лучей в данном виде аксонометрического отображения.

Из рис.1 следует, что, поскольку плоскости ZOR, YOQ, XOP проведены так, что они перпендикулярны плоскости ZYX, то именно углы OZR, OYQ и OXP определяют коэффициенты искажений (К) по координатным осям OZ, OY, OX. То есть, $К_z = \cos\alpha$, $К_x = \cos\alpha_1$, $К_y = \cos\alpha_2$. Но так как углы α, α_1 и α_2 неодинаковы, то $К_z \neq К_y \neq К_x$. Именно этот факт соответствует триметрической аксонометрии. Справедливым остаётся и обобщающее уравнение $К_x^2 + К_y^2 + К_z^2 = 2$ [1–5].

Чтобы выявить в этом случае некоторые количественные угловые соотношения рассмотрим ΔZOR, образованный в результате сечения координатного тригранника плоскостью проходящей через координатную ось OZ и перпендикуляр OO_1 к аксонометрической плоскости проекций ZYX.

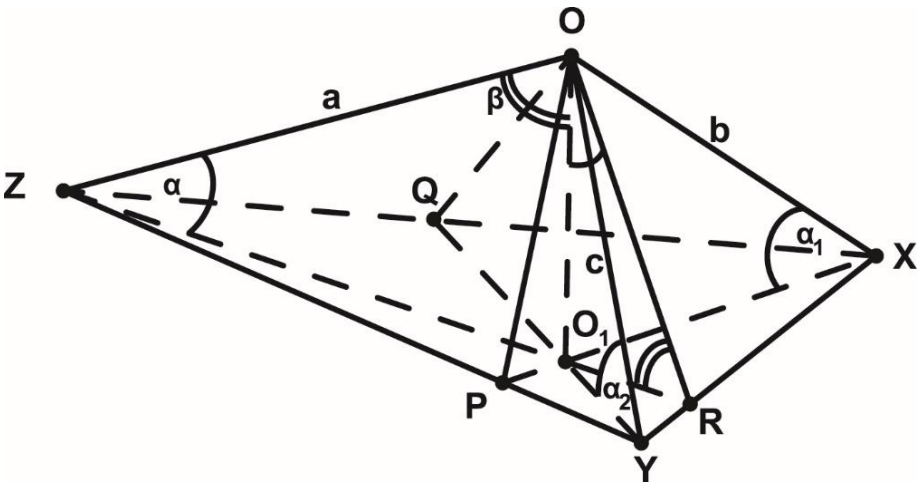


Рис. 1. Ортогональная триметрическая аксонометрия [$\cos^2\alpha_i = (n/m)_{z,y,x}$]

Названый треугольник состоит из двух других треугольников- – ΔOZO_1 , ΔORO_1, что можно выразить так: $\Delta ZOR = \Delta OZO_1 + \Delta ORO_1$. Поскольку соответствующие углы обозначенных треугольников взаимно равны (рис.1), то это значит, что $\Delta ZOR \sim \Delta OZO_1 \sim \Delta ORO_1$. Тогда можно записать: $(O_1Z)/(OZ) = (OZ)/(ZR)$. То есть, $(OZ)^2 = (O_1Z) \cdot (ZR)$. Если принять, что $(O_1Z)/(ZR) = n/m$ (назовём эту пропорцию "высотной"), то $(OZ)^2 = (n/m) \cdot (ZR) \cdot (ZR)$ или же $(OZ)^2/(ZR)^2 = n/m$. Но $(OZ)/(ZR) = cos\alpha$. Значит $cos^2\alpha = n/m = К_z^2$. Величины $К_y$ и $К_x$ можно получить аналогичным путём, рассматривая треугольники ΔYOQ и ΔXOP. Тогда значения $К_{z,x,y} = \cos(\alpha; \alpha_1; \alpha_2) = [(n/m)_{z,x,y}]½$ при условии их взаимного неравенства.

В случае изометрической аксонометрии её исходным параметрическим соотношением служит равенство: α= b = c (рис.2). Отсюда следует, что $ZY = YX = XZ$. То есть, треугольник ΔZYX – равносторонний треугольник. Известно [6; 7], что в таком треугольнике точка O_1 делит его высоты (биссектрисы, медианы) в отношении $(ZO_1) / (ZR) = (YO_1)/(YQ) = (XO_1)/(XP) = n/m = 2/3$. Если учесть, что $\angle\alpha = \angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$ (это очевидно из рис.2), и соответственно $К_z = К_y = К_x = К_{z,y,x}$, то $К_{z,y,x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{½} \approx 0{,}82$.Тогда $\angle\alpha_i \approx 35°$; $\angle\beta_i \approx 55°$при условии, что $\angle\alpha_i + \angle\beta_i = 90°$.

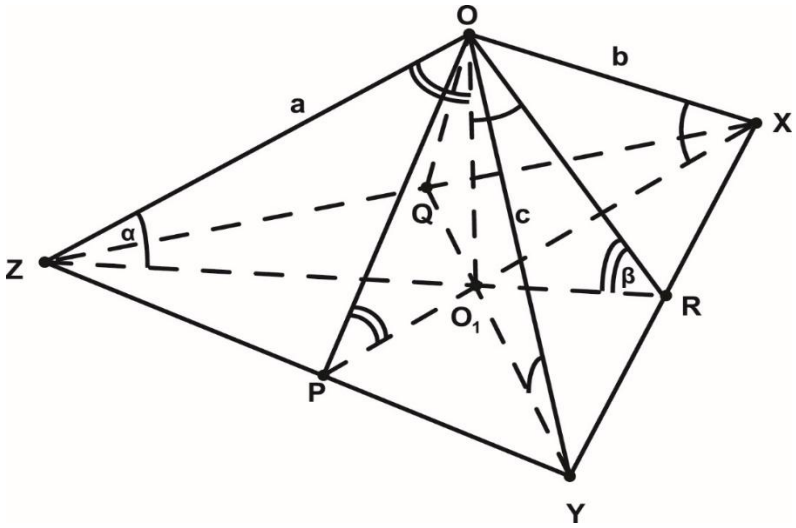


Рис. 2. Ортогональная изометрическая аксонометрия [$\cos^2\alpha = (n/m)_{z,y,x}=2/3$]

Угловые соотношения аксонометрической диметрии [здесь$\angle\alpha\neq(\angle\alpha_1=\angle\alpha_2)$] удобно рассматривать в процессе эволюции "изометрического" координатного тригранника (рис.2). Такую эволюцию можно представить в двух вариантах. Один из них (рис.3) предполагает, что "высотная пропорция" – $(n/m)_z$ варьирует следующим образом: $2/3\leq(n/m)_z\rightarrow1$. Тогда углы α и β в прямоугольном триграннике изменяются в интервалах соответственно $[\sim35°;\ 0°)$ и $[\sim55^o;\ 90^o)$.

Другой вариант эволюции изометрического координатного тригранника реализуется (рис.4) в случае, при котором "высотная пропорция" стремится к 0 от своего "изометрического" значения, то есть, $0\leftarrow(n/m)_z\leq2/3$. А для углов α и β интервалами изменений являются соответственно интервалы – $(90^o;\ \sim35°]$ и $(0°;\ \sim55^o]$.

Первый вариант эволюции изометрического координатного тригранника может быть реализован двумя способами. Один из них – это, когда точка $Z\rightarrow\infty$. Тогда сторона тригранника $\alpha = OZ \rightarrow \infty$, стороны $b = c$ и XY остаются неизменными, отрезок $OO_1\rightarrow OR = const$, координатная ось OZ стремится к параллельности со следом ZR плоскости ZOR и, наконец, когда стороны XZ, YZ и OZ становятся взаимно параллельными.

Второй способ реализации того же варианта эволюции изометрического тригранника (рис.2) возможен, если $(b = c) \rightarrow 0$

при $\alpha = OZ = const$ (рис.3). Тогда $OO_1 \to OR \to 0$; $XY \to 0$; $OZ \to ZR$, а $(XZ = YZ) \to OZ$.

Оба указаные способы первого варианта эволюции имеют следствием (рис.3): $35° \approx \angle\alpha \to 0°$; $O_1R \to 0$; $55° \approx \angle\beta \to 90°$; $60° = \angle YZX \to 0$; $120° = (\angle YO_1X = \angle PO_1Q) \to 180°$; $120° = (\angle ZO_1X = \angle ZO_1Y) \to 90°$; $60° = (\angle ZYX = \angle ZXY) \to 90°$; $(\Delta OO_1X = \Delta OO_1Y) \to (\Delta ORX = \Delta ORY)$. Из последней записи следует: $35° \approx (\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2) \to (\angle OXY = \angle OYX) = 45°$. То есть, при таком варианте эволюции аксонометрической изометрии (рис.2) мы получаем аксонометрическую диметрию (рис. 3),при которой коэффициенты искажений по координатным осям изменяются в диапазонах: $0{,}82 \approx K_z < 1$ и $0{,}82 \approx (K_x = K_y) > 0{,}71$.

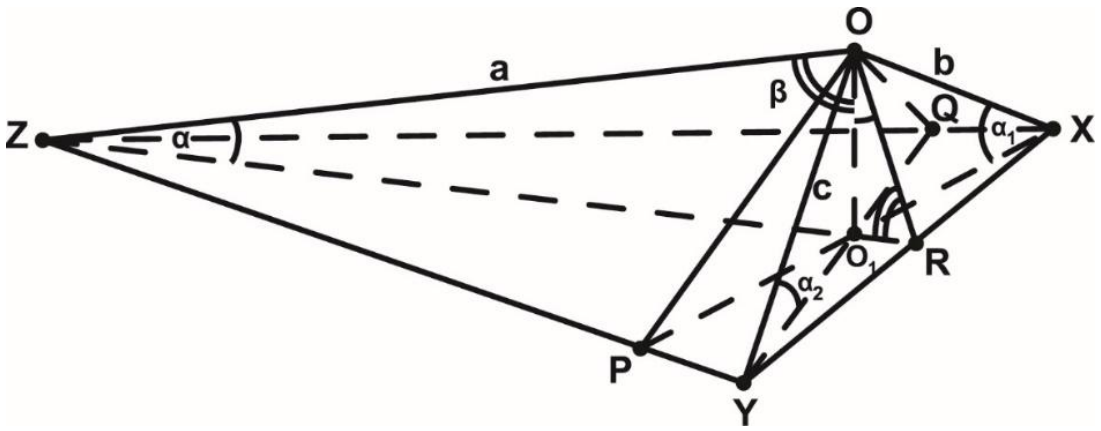


Рис. 3. Ортогональная аксонометрическая диметрия при $2/3 \leq (n/m)_{Z,R} < 1$

Второй вариант эволюции изометрического координатного тригранника (рис.2) в аксонометрическую диметрию (рис.4), как и первый вариант, также может быть реализован двумя способами. Один из них предполагает следующие этапы: точка $R \to \infty$; $(b = c) = (OX = OY) \to \infty$ при $\alpha = OZ = const$ и $OO_1 \to OZ = const$. При этом следы сечений OR и ZR стремятся ко взаимной параллельности так же, как и стороны $OX = OY$ стремятся к параллельности со сторонами $ZX = ZY$.

Второй способ реализации второго варианта эволюции изометрической формы координатного изометрического тригранника (рис.2) в диметрию

предполагает процессы (рис.4): $(\alpha = OZ) \rightarrow OO_1 \rightarrow 0$; $(ZX = ZY) \rightarrow$ $\rightarrow (OX = OY) = (b = c) = const.$ При этом $ZR \rightarrow O_1R \rightarrow OR(= const)$.

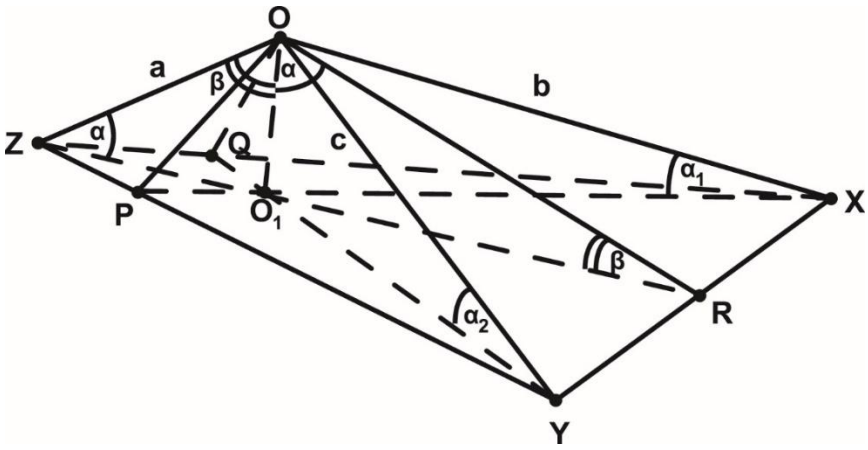


Рис. 4. Ортогональная аксонометрическая диметрия при $0 < (n/m)_{ZR} \leq 2/3$

Выше обозначеные переходы имеют следствием (рис.4): $90° \leftarrow \angle\alpha \approx 35°$; $0^o \leftarrow (\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2) \approx 35°$; $0^o \leftarrow \angle\beta \approx 55°$; $90° = \angle YOX \leftarrow \angle YZX = 60°$; $90° \leftarrow (\angle PO_1Q = \angle XO_1Y) = 120^o 90° \leftarrow (\angle OZX = \angle OZY) = 45°; 0° \leftarrow (\angle ZXO =$ $= \angle ZYO) = 45°$; $45° = (\angle OYX = \angle OXY) \leftarrow (\angle ZYX = \angle ZXY) = 60^o$; $135° \leftarrow (\angle ZO_1Y = \angle ZO_1X) = 120^o$.

Полученная таким образом аксонометрическая диметрия характеризуется коэффициентами координатно – осевых искажений, изменяющимися в интервалах: $0 < K_z \approx 0{,}82$ и $1 > (K_x = K_y) \approx 0{,}82$.

Найденные интервалы изменений коэффициентов искажений по осям координат аксонометрической ортогональной диметрии можно получить также и из формул функциональной взаимозависимости соответствующих углов в прямоугольном координатном тетраэдре (рис.3;4). А именно, $\cos\alpha_{1;2} = [(1 + sin^2\alpha)/2]^{½}$ и $\cos\alpha = (2)^{½} \cdot \sin\alpha_{1;2}$. Эти формулы выведены, исходя из свойств треугольников: $\Delta\, OO_1Y$; $\Delta\, OO_1R$; $\Delta\, O_1RY$; $\Delta\, ORY$ и $\Delta\, OZR$ (рис.3;4). Однако результаты таких формальных расчётов теряют структурную наглядность динамики изменений коэффициентов искажений $(K_{z,y,x})$ по сравнению с результатами анализа эволюционных изменений прямоугольного координатного тетраэдра аксонометрической

изометрии, представленного на рис.2. Действительно, если принять во внимание, что изменение коэффициентов искажений $K_{z,y,x}$ во всём своём диапазоне развивается за четверть периода ($0°<\angle\alpha<90°$) косинусоидальной гармоники при $0<(n/m)_z<1$, то из «эволюционного анализа» с отчётливостью следует, что от 0 до 1 изменяется при этом лишь коэффициент K_z, тогда как коэффициенты $K_y = K_x$ изменяются в интервале – (1; 0,71). В самом деле, если $0 < \angle\alpha_{1,2} \approx 35°$ и $90° > \angle\alpha \approx 35°$ при $0 < (n/m)_z \leq 2/3$, то $1 > (K_y = K_x) \approx 0{,}82$ (рис.4). В случае же $35° \approx \angle\alpha_{1;2} < 45°$ при $35° \approx \angle\alpha > 0°$ и $2/3 \leq (n/m)_z < 1$ имеем $0{,}82 \approx (K_y = K_x) > 0{,}71$ (рис.3).

Представленные выше аналитические выражения угловых взаимозависимостей аксонометрии могут быть записаны и через параметр "n/m", а именно: $\cos\alpha = [(n/m)_z]^{½} = K_z$ и $\cos\alpha_{1;2} = \{[2-(n/m)_z]/2\}^{½} = = (K_x = K_y)$. Удобство такой формы записи заключается в том, что для практического использования угловые измерения заменены здесь более простыми линейными измерениями длин отрезков ("n" или "m") соответствующих высот треугольника следов – ΔZXY, определяемых положением его ортоцентра – O_1. С помощью параметра n/m можно также однозначно определить и углы между аксонометрическими осями координат (рис.2-4). Для этого исходными параметрами могут быть произвольно выбранные высота $ZR(= m_z)$ ($XP = m_x$ или $YQ = m_y$ – рис.2) треугольника следов и положение на ней ортоцентра – O_1.Тогда сам ΔZXY строится по трём точкам: одна из них– его вершина Z (X или Y – рис.2), а две другие – это концы его стороны $(XY) = 2m_z \cdot [1-(n/m)_z]^{½}$. В полученном таким образом ΔZXY (рис. 2–4) углы всех "категорий" автоматически принимают значения, соответствующие заданным параметрам рассмотренных выше способов аксонометрического проецирования.

При аксонометрической триметрии коэффициенты искажений – $K_{z,x,y}$ определяются через параметр n/m по каждой координатной оси

независимо друг от друга, но в зависимости от положения их ортоцентра – O_1 на плоскости треугольника следов –ΔZXY (рис.1).

Таким образом, в настоящем изложении использование предложенного здесь параметра – "высотная пропорция" позволяет представить материал об ортогональной аксонометрии в достаточно наглядной и компактной форме, что облегчает его освоение с целью дальнейшего его практического использования.

Литература

1. Чалый А.Т. Курс начертательной геометрии. – М.-К.: МАШГИЗ, 1952. – 279 с.
2. Колотов С. М. Начертательная геометрия. – К.: "Вища школа", 1975. – 261 с.
3. Виноградов Н.Н. Начертательная геометрия. – Минск.: "Вышэйшая школа", 1977. – 368 с.
4. Фролов С. А. Начертательная геометрия. – М.: "МАШИНОСТРОЕНИЕ", 1978. – 240 с.
5. Михайленко В.Є., Євстіфеєв М.Ф., Ковальов С.М. Нарисна геометрія. – К.: "ВИЩА ШКОЛА", 2004. – 300 с.
6. Нікулін О .В. Геометрія. Поглиблений курс. – К.: "ПЕРУН", 1999. – 349 с.
7. Жолдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики). – К.: МАУП, 2004. – 456 с.